به‌نام خدا

دانشکدهٔ علوم ریاضی

# امتحان میان‌ترم آنالیز ریاضی ۱

۲۲ – ۳۲۵

نیمسال دوم ۹۰–۸۹

تاریخ امتحان: ۹۰/۲/۸
مدّت امتحان: ۴ ساعت

**سؤال ۱.** با نوشتنِ «درست است.» یا «نادرست است.» در پاسخ‌نامه و بدون ذکر دلیل، گزاره‌های درست و نادرست را مشخص کنید. (پاسخ غلط هم‌وزنِ پاسخ صحیح **نمرهٔ منفی** دارد.)

الف) فرض کنید $(M,d)$ یک فضای متریک باشد. اگر $(p_n)$ دنباله‌ای در $M$ باشد، $p \in M$ و $p_n \nrightarrow p$، آنگاه عدد حقیقی $\delta > 0$ و زیردنبالهٔ $(p_{n_k})$ از $(p_n)$ وجود دارد که برای هر عدد طبیعی $k$، $d(p_{n_k}, p) \geq \delta$.

ب) فرض کنید $M$ یک فضای متریک و $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های $M$ باشد. در این صورت $\overline{\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha} = \bigcup_{\alpha\in I} \overline{A_\alpha}$.

ج) فضای متریک $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ xy \geq 1\}$ به‌عنوان زیرفضایی از $\mathbb{R}^2$ کامل است. ($\mathbb{R}^2$ به متریک اقلیدسی مجهز است.)

د) فرض کنید تابع $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوستهٔ یکنواخت باشد. در این صورت $\lim_{x\to a^+} f(x)$ و $\lim_{x\to b^-} f(x)$ وجود دارد. ($\mathbb{R}$ به متریک اقلیدسی مجهز است و $(a,b)$ زیرفضای آن می‌باشد.)

هـ) تابع $f : [1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x) = \dfrac{1}{x}$ پیوستهٔ یکنواخت است. ($\mathbb{R}$ به متریک اقلیدسی مجهز است و $[1,\infty)$ زیرفضای آن می‌باشد.)

و) تابع پیوسته‌ای مثل $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد با این ویژگی که $x \in \mathbb{Q}$ اگر و فقط اگر $f(x) \notin \mathbb{Q}$. ($\mathbb{R}$ به متریک اقلیدسی مجهز است و $[0,1]$ زیرفضای آن می‌باشد.)

ز) فضای متریک $M$ همبند است اگر و فقط اگر برای هر زیرمجموعهٔ $A$ از $M$، سرهٔ $A$، $\partial A \neq \emptyset$.

ح) فرض کنید $M$ فضای متریک گسسته و $S$ زیرمجموعه‌ای ناتهی از $M$ باشد. در این صورت $S$ ناهمبند است.

**سؤال ۲.** هر کدام از گزاره‌های زیر را که درست است ثابت کنید و برای هر یک که نادرست است مثالی ناقض ارائه کنید.

الف) فرض کنید $M$ و $N$ دو فضای متریکِ همان‌ریخت باشند. اگر $M$ کامل باشد، آنگاه $N$ نیز کامل است.

ب) فرض کنید $M$ یک فضای متریک باشد، $p \in M$ و نیز $r$ را یک عدد حقیقی مثبت در نظر بگیرید. در این صورت $\overline{M_r(p)}$ فشرده است.

ج) فرض کنید $M$ یک فضای متریک و $A$ و $B$ دو زیرمجموعهٔ ناتهی و بسته از $M$ باشند با این ویژگی که $A \cap B = \emptyset$. در این صورت زیرمجموعه‌های باز $U$ و $V$ از $M$ موجودند که $A \subseteq U$، $B \subseteq V$ و $U \cap V = \emptyset$.

د) فرض کنید $M$ یک فضای متریک و $S$ زیرمجموعه‌ای سره از $M$ باشد. اگر $p \in S$، $q \in M \setminus S$ و $f : [۰, ۱] \longrightarrow M$ یک مسیر پیوسته باشد که $p$ را به $q$ وصل می‌کند، آنگاه $t \in [۰, ۱]$ وجود دارد با این ویژگی که $f(t) \in \partial S$. ($[۰, ۱]$ با متریک القا شده از متریک اقلیدسی $\mathbb{R}$ در نظر گرفته شده است.)

**سؤال ۳.** فرض کنید $M$ یک فضای متریک و $S$ زیرمجموعه‌ای از $M$ باشد. ثابت کنید $\lim S$ زیرمجموعه‌ای بسته از $M$ است. (صورت و اثبات هر دو لمِ لازم نیز باید نوشته شود.)

**سؤال ۴.** فرض کنید $M$ و $N$ دو فضای متریک و $f : M \longrightarrow N$ تابعی پیوسته باشد. ثابت کنید اگر $M$ فشرده باشد، آنگاه $f$ پیوستهٔ یکنواخت است.

**سؤال ۵.** فرض کنید تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ خاصیت مقدار میانی دارد: یعنی برای هر سه عدد حقیقی $a$، $b$ و $c$ که $f(a) < c < f(b)$، $x$ی بین $a$ و $b$ وجود دارد با این ویژگی که $f(x) = c$. ثابت کنید اگر برای هر $r \in \mathbb{Q}$، $f^{\mathrm{pre}}(\{r\})$ زیرمجموعه‌ای بسته از $\mathbb{R}$ باشد، آنگاه $f$ پیوسته است. ($\mathbb{R}$ به متریک اقلیدسی مجهز است.)

**سؤال ۶.** فرض کنید $M$ و $N$ دو فضای متریک باشند. ثابت کنید تابع $f : M \longrightarrow N$ پیوسته است اگر و فقط اگر برای هر زیرمجموعهٔ $A$ از $M$، $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

**سؤال ۷.** فرض کنید $M$ یک فضای متریک فشرده و $f : M \longrightarrow M$ تابعی پیوسته باشد. ثابت کنید زیرمجموعهٔ ناتهی و فشردهٔ $A$ از $M$ وجود دارد با این ویژگی که $f(A) = A$.

**سؤال ۸.** فرض کنید $M$ یک فضای متریک همبند باشد که بیش از یک عضو دارد. ثابت کنید $M$ مجموعه‌ای ناشمارا است.

**توزیع نمره.** سؤال ۱: هر قسمت ۱ نمره،
سؤال ۲: هر قسمت ۵ نمره،
سؤال‌های ۳ تا ۸: هر کدام ۱۲ نمره.

**مجموع: ۱۰۰ نمره**