به‌نام خدا

دانشکدهٔ علوم ریاضی

حل مسائل امتحان میان‌ترم آنالیز ریاضی ۱

۹۰/۲/۸

سؤال ۱: الف) درست است. ب) نادرست است.
ج) درست است. د) درست است.
ه) درست است. و) نادرست است.
ز) درست است. ح) نادرست است. ■

سؤال ۲: الف) **نادرست است.** $M=\mathbb{R}$ را به متریک اقلیدسی مجهز کنید و زیرفضای $N=(0,1)$ از آن را در نظر بگیرید. در این صورت $N\cong M$، M کامل است، ولی N کامل نمی‌باشد، زیرا دنبالهٔ کشی $(\frac{1}{n})_{n\geq 2}$ که دنباله‌ای در N است به نقطه‌ای از N همگرا نمی‌باشد. ■

ب) **نادرست است.** $M=\mathbb{R}$ را به متریک گسسته مجهز کنید. در این صورت $\overline{M_2(0)}=\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}$ فشرده نمی‌باشد. ■

ج) **درست است.** فرض کنید M به متریک d مجهز باشد. بنابر تمرین ۱۴ از صفحهٔ ۱۱۵ کتاب درسی، برای هر زیرمجموعهٔ ناتهی S از M، تابع $\rho_S: M\longrightarrow\mathbb{R}$ با ضابطهٔ

$$\rho_S(x)=\operatorname{dist}(x,S):=\inf\{d(x,s)\mid s\in S\}$$

تابعی پیوسته است و این ویژگی را دارد که $\rho_S(x)=0$ اگر و فقط اگر $x\in\overline{S}$ ($\mathbb{R}$ با متریک اقلیدسی در نظر گرفته شده است). چون A و B زیرمجموعه‌های ناتهی از M هستند، پس توابع پیوستهٔ $\rho_A: M\longrightarrow\mathbb{R}$ و $\rho_B: M\longrightarrow\mathbb{R}$ را به دست می‌آوریم. توجه می‌کنیم که برای هر $x\in M$، $\rho_A(x)+\rho_B(x)\neq 0$، زیرا در غیر این صورت بسته بودن A و B ایجاب می‌کند که برای xی داشته باشیم $x\in A\cap B$ که تناقض است. پس تابع f با ضابطهٔ

$$f(x)=\frac{\rho_A(x)}{\rho_A(x)+\rho_B(x)}$$

تابعی پیوسته از M به $[0,1]$ تعریف می‌کند ($[0,1]$ زیرفضای $\mathbb{R}$ است). چون $[0,\frac{1}{2})$ و $(\frac{1}{2},1]$ زیرمجموعه‌های باز $[0,1]$ هستند، پس $U:=f^{\rm pre}([0,\frac{1}{2}))$ و $V:=f^{\rm pre}((\frac{1}{2},1])$ زیرمجموعه‌های باز M می‌باشند و به راحتی دیده می‌شود که $A\subseteq U$، $B\subseteq V$ و $U\cap V=\emptyset$. ■

د) **درست است.** اگر $p\in\partial S$، کافی است قرار دهیم $t=0$. اگر $q\in\partial S$، کافی است قرار دهیم $t=1$. اکنون فرض می‌کنیم $p,q\notin\partial S$. چون f پیوسته است و S° و $(M\setminus S)^\circ$ زیرمجموعه‌های باز M می‌باشند، لذا $A:=f^{\rm pre}(S^\circ)$ و $B:=f^{\rm pre}((M\setminus S)^\circ)$ زیرمجموعه‌های باز $[0,1]$ هستند که به‌وضوح مجزا نیز می‌باشند. از طرفی $p\notin\partial S$ ایجاب می‌کند که $0\in A$ و $q\notin\partial S$ ایجاب می‌کند که $1\in B$ و در نتیجه A و B ناتهی‌اند. در نتیجه همبند بودن $[0,1]$ ایجاب می‌کند که $A\cup B\subsetneq[0,1]$ و لذا $t\in(0,1)$ وجود دارد که $t\notin A$ و $t\notin B$. پس $f(t)\notin S^\circ$ و $f(t)\notin(M\setminus S)^\circ$ و لذا $f(t)\in\partial S$. ■

سؤال ۳: قضیهٔ ۷ از صفحهٔ ۶۲ کتاب درسی. ■

سؤال ۴: قضیهٔ ۴۴ از صفحهٔ ۸۲ کتاب درسی. ■

سؤال ۵: فرض کنید f پیوسته نباشد. پس $x_0\in\mathbb{R}$ و $\epsilon_0>0$ وجود دارد با این ویژگی: برای هر $\delta>0$، $x=x(\delta)\in\mathbb{R}$ وجود دارد که $|x-x_0|<\delta$ و $|f(x)-f(x_0)|\geq\epsilon_0$. در نتیجه برای هر عدد طبیعی n، $x_n\in\mathbb{R}$ وجود دارد که $|x_n-x_0|<\frac{1}{n}$ و $|f(x_n)-f(x_0)|\geq\epsilon_0$. بدین ترتیب دنبالهٔ (x_n) در $\mathbb{R}$ به دست می‌آید که $x_n\longrightarrow x_0$ و برای هر عدد طبیعی n، $|f(x_n)-f(x_0)|\geq\epsilon_0$. در نتیجه لااقل یکی از نامساوی‌های $f(x_n)-f(x_0)\geq\epsilon_0$ یا $f(x_n)-f(x_0)\leq-\epsilon_0$ به ازای نامتناهی n برقرار است. مثلاً فرض کنید اوّلی به ازای نامتناهی n برقرار باشد (چنانچه دومی به ازای نامتناهی n برقرار باشد، به صورت مشابه عمل می‌کنیم). در نتیجه زیردنبالهٔ (x_{n_k}) از (x_n) وجود دارد که به‌وضوح $x_{n_k}\longrightarrow x_0$ و برای هر عدد طبیعی k، $f(x_0)<f(x_0)+\epsilon_0\leq f(x_{n_k})$. پس می‌توانیم عدد گویای r را طوری در نظر بگیریم که برای هر k، $f(x_0)<r<f(x_{n_k})$. چون f خاصیت مقدار میانی دارد، پس برای هر k، t_{n_k} بین x_0 و x_{n_k} وجود دارد که $f(t_{n_k})=r$ یا $t_{n_k}\in f^{\rm pre}(\{r\})$. لذا (t_{n_k}) دنباله‌ای در $f^{\rm pre}(\{r\})$ است که $t_{n_k}\longrightarrow x_0$. چون $f^{\rm pre}(\{r\})$ در $\mathbb{R}$ بسته است، پس $x_0\in f^{\rm pre}(\{r\})$ و لذا $f(x_0)=r$ که تناقض است. پس f پیوسته است. ■

سؤال ۶: ($\Leftarrow$): برای هر $A\subseteq M$، چون $\overline{f(A)}$ در N بسته است و f پیوسته، پس $f^{\rm pre}\left(\overline{f(A)}\right)$ در M بسته می‌باشد. امّا به‌وضوح داریم $A\subseteq f^{\rm pre}\left(\overline{f(A)}\right)$، پس $\overline{A}\subseteq f^{\rm pre}\left(\overline{f(A)}\right)$ و لذا

$f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$. ■

($\Rightarrow$): فرض کنید K زیرمجموعه‌ای بسته در N باشد. با در نظر گرفتن $A:=f^{\rm pre}(K)\subseteq M$ در فرض و نیز بسته بودن K در N داریم:

$$f\left(\overline{f^{\rm pre}(K)}\right)\subseteq\overline{f(f^{\rm pre}(K))}\subseteq\overline{K}=K.$$

در نتیجه $\overline{f^{\rm pre}(K)}\subseteq f^{\rm pre}(K)$ و لذا $\overline{f^{\rm pre}(K)}=f^{\rm pre}(K)$. این نیز نتیجه می‌دهد که $f^{\rm pre}(K)$ در M بسته است و لذا بنابر قضیهٔ خوانده شده f پیوسته است. ■

سؤال ۷: قرار دهید $A_1 = f(M)$ و برای $n \geq 2$ تعریف کنید $A_n = f(A_{n-1})$. به راحتی دیده می‌شود که $(A_n)_{n\geq 1}$ دنباله‌ای تودرتو از زیرمجموعه‌های ناتهی M است. چون f پیوسته و M فشرده است، پس A_n ها فشرده‌اند و لذا بنابر قضیهٔ اشتراک کانتور، $A := \bigcap_{n\geq 1} A_n$ نیز زیرمجموعه‌ای ناتهی و فشرده از M است. حال ادّعا می‌کنیم که $f\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) = \bigcap_{n\geq 1} f(A_n)$. به راحتی دیده می‌شود که $f\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) \subseteq \bigcap_{n\geq 1} f(A_n)$. حال فرض کنید $y \in \bigcap_{n\geq 1} f(A_n)$ عضوی دلخواه باشد. پس برای هر $n \geq 1$، $x_n \in A_n$ وجود دارد که $y = f(x_n)$. بدین ترتیب دنبالهٔ (x_n) در M به دست می‌آید و فشرده بودن M، وجود زیردنبالهٔ (x_{n_k}) از آن را تضمین می‌کند که $x_{n_k} \longrightarrow x$، $x \in M$. اکنون برای عدد طبیعی دلخواه ℓ، $(x_{n_k})_{k\geq \ell}$ دنباله‌ای در A_ℓ است و چون A_ℓ در M بسته است، پس $x \in A_\ell$. چون ℓ دلخواه بود، پس $x \in \bigcap_{n\geq 1} A_n$. پیوسته بودن f ایجاب می‌کند که $f(x_{n_k}) \longrightarrow f(x)$ و چون $(f(x_{n_k}))$ دنبالهٔ ثابت (y) است پس $y = f(x) \in f\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right)$. در نتیجه $\bigcap_{n\geq 1} f(A_n) \subseteq f\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right)$. لذا ادّعا برقرار است، یعنی $f\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) = \bigcap_{n\geq 1} f(A_n)$. اکنون می‌توانیم بنویسیم

$$f(A) = f\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) = \bigcap_{n\geq 1} f(A_n) = \bigcap_{n\geq 1} A_{n+1} = A. \blacksquare$$

سؤال ۸: فرض کنید M به متریک d مجهز باشد. بنابر فرض می‌توانیم دو عضو متمایز از M مثل a و b انتخاب کنیم. بنابر مطالب خوانده شده، تابع $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x) = d(x, a)$ تابعی پیوسته است ($\mathbb{R}$ با متریک اقلیدسی در نظر گرفته شده است). چون $f(a) = 0 < d(b, a) = f(b)$ و مجموعهٔ نقاط بین $f(a)$ و $f(b)$ ناشمارا است و نیز بنابر قضیهٔ مقدار میانیِ تعمیم یافته f باید این مقادیر را به خود بگیرد، پس M لزوماً ناشمارا است. $\blacksquare$