به‌نام خدا

دانشکدهٔ علوم ریاضی

امتحان پایان‌ترم آنالیز ریاضی ۱

۲۲ – ۳۲۵

نیمسال دوم ۹۰–۸۹

تاریخ امتحان: ۹۰/۳/۲۴
مدّت امتحان: ۳ ساعت

سؤال ۱. فرض کنید M یک فضای متریک و A زیرمجموعه‌ای از M باشد. ثابت کنید اگر A فشردهٔ پوششی باشد، آنگاه فشردهٔ دنباله‌ای نیز می‌باشد.

سؤال ۲. صورت لمِ عدد لُبگ را بنویسید و آن را ثابت کنید. با استفاده از لمِ عدد لُبگ نشان دهید اگر $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعی کراندار و تقریباً همه جا پیوسته باشد، آنگاه f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان است.

سؤال ۳. ثابت کنید اگر $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ فشرده باشد، آنگاه $\mathcal{F}$ خانواده‌ای هم‌پیوسته از توابع است. ($\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ به متریک القا شده از نُرم سوپریموم مجهز است.)

سؤال ۴. صورت قضیهٔ تقریب وایرشتراس را بنویسید و آن را ثابت کنید.

سؤال ۵. فرض کنید $f\in\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ بر (a,b) مشتق‌پذیر باشد و نیز عدد حقیقی مثبت A موجود باشد با این ویژگی که برای هر $x\in(a,b)$، $|f'(x)|\leq A|f(x)|$. ثابت کنید اگر $f(a)=0$، آنگاه $f=0$ بر $[a,b]$.

سؤال ۶. هر یک از دنباله‌های تابعی (f_n) که در زیر تعریف شده‌اند، به‌طور نقطه‌وار در $[0,1]$ به صفر همگرا هستند. با ذکر دلیل، مشخص کنید همگرایی کدامیک در $[0,1]$ یکنواخت می‌باشد و کدامیک یکنواخت نمی‌باشد.

(الف) $f_n(x)=\dfrac{x}{1+nx^2}$، (ب) $f_n(x)=nxe^{-nx^2}$، (ج) $f_n(x)=x^nf(x);\ f\in\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}),\ f(1)=0$

سؤال ۷. فرض کنید (f_n) دنباله‌ای از توابع حقیقی باشد که بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان هستند و برای $n\geq 1$، تابع $F_n:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ را با ضابطهٔ $F_n(x)=\int_a^x f_n(t)dt$ تعریف کنید. ثابت کنید اگر (f_n) به‌طور یکنواخت کراندار باشد، آنگاه (F_n) زیردنباله‌ای دارد که به‌طور یکنواخت به تابعی پیوسته همگراست.

سؤال ۸. فرض کنید $f\in\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ این ویژگی را داشته باشد که برای هر عدد صحیح نامنفی n، $\int_a^b x^{3n}f(x)dx=0$. ثابت کنید $f=0$ بر $[a,b]$.

توزیع نمره. سؤال ۱: ۵ نمره، سؤال ۲: ۸+۱۲=۲۰ نمره،
سؤال ۳: ۱۰ نمره، سؤال ۴: ۱۵ نمره،
سؤال ۵: ۱۰ نمره، سؤال ۶: ۵+۵+۵=۱۵ نمره،
سؤال ۷: ۱۰ نمره، سؤال ۸: ۱۵ نمره.

مجموع: ۱۰۰ نمره