به‌نام خدا

دانشکدهٔ علوم ریاضی

حل مسائل امتحان پایان‌ترم آنالیز ریاضی ۱

۹۰/۳/۲۴

سؤال ۱: قضیهٔ ۵۴ ($a \Longrightarrow b$) از صفحهٔ ۸۹ کتاب درسی. ■

سؤال ۲: لم ۵۵ از صفحهٔ ۹۰ و قضیهٔ ۲۱ ($\Longleftarrow$) از صفحهٔ ۱۶۳ کتاب درسی. ■

سؤال ۳: قضیهٔ ۱۷ ($\Longrightarrow$) از صفحهٔ ۲۱۷ کتاب درسی. ■

سؤال ۴: قضیهٔ ۱۸ از صفحهٔ ۲۱۷ کتاب درسی. ■

سؤال ۵: فرض کنید $P=\{a=x_0,x_1,\dots,x_{n-1},x_n=b\}$ افرازی از $[a,b]$ با $\mathrm{mesh}(P)<\frac{1}{A}$ باشد. ادّعا می‌کنیم که برای هر $1\le i\le n$، اگر $f(x_{i-1})=0$، آنگاه $f=0$ بر $[x_{i-1},x_i]$. برای نشان دادن درستی ادّعا، برای $1\le i\le n$ داده شده، قرار می‌دهیم

$$M_i=\sup\left\{|f(x)| \mid x\in[x_{i-1},x_i]\right\}.$$

برای هر $x\in(x_{i-1},x_i]$، بنابر قضیهٔ مقدار میانگین، $\xi_x\in(x_{i-1},x)$ وجود دارد که

$$f(x)=f(x)-f(x_{i-1})=f'(\xi_x)(x-x_{i-1}).$$

در نتیجه با استفاده از فرض می‌توانیم بنویسیم

$$|f(x)|=|f'(\xi_x)|(x-x_{i-1})\le A|f(\xi_x)|(x-x_{i-1}) \le AM_i\ \mathrm{mesh}(P).$$

هم‌چنین، به‌وضوح داریم $|f(x_{i-1})|=0\le AM_i\ \mathrm{mesh}(P)$. پس برای هر $x\in[x_{i-1},x_i]$، $|f(x)|\le AM_i\ \mathrm{mesh}(P)$ و لذا $M_i\le AM_i\ \mathrm{mesh}(P)$. در نتیجه $M_i=0$، زیرا در غیر این صورت $\mathrm{mesh}(P)\ge\frac{1}{A}$ که تناقض با انتخاب P دارد. پس $f=0$ بر $[x_{i-1},x_i]$ و لذا درستی ادّعا ثابت می‌شود. چون $f(x_0)=f(a)=0$، پس بنابر ادّعا $f=0$ بر $[a,x_1]$. بالاخص $f(x_1)=0$ و لذا مجدداً بنابر ادّعا $f=0$ بر $[x_1,x_2]$. با ادامهٔ این فرآیند به دست می‌آوریم $f=0$ بر $[a,b]$. ■

سؤال ۶: الف) **همگرایی f_n به صفر در $[0,1]$ یکنواخت است.** برای $n\ge 1$ داده شده، تنها ریشهٔ $f_n'(x)=\frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$ در $[0,1]$ برابر است با $x=\frac{1}{\sqrt{n}}$. چون $f_n(0)=0$، $f_n(1)=\frac{1}{1+n}$، $f_n(\frac{1}{\sqrt{n}})=\frac{1}{2\sqrt{n}}$ و $0<\frac{1}{1+n}\le\frac{1}{2\sqrt{n}}$، لذا ماکسیموم مطلق f_n در $[0,1]$ برابر است با $\frac{1}{2\sqrt{n}}$. اکنون $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ را به متریک d، متریک القا شده از نُرم سوپریموم، مجهز کنید. داریم

$$d(f_n,0)=\|f_n\|=\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)|=\frac{1}{2\sqrt{n}}\to 0.$$

پس $f_n\to 0$ در $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ و لذا $f_n\rightrightarrows 0$ در $[0,1]$. ■

ب) **همگرایی f_n به صفر در $[0,1]$ یکنواخت نیست.** برای $n\ge 1$ داده شده، تنها ریشهٔ $f_n'(x)=n(1-2nx^2)e^{-nx^2}$ در $[0,1]$ برابر است با $x=\frac{1}{\sqrt{2n}}$. چون $f_n(0)=0$، $f_n(1)=ne^{-n}$، $f_n(\frac{1}{\sqrt{2n}})=\sqrt{\frac{n}{2e}}$ و $0<ne^{-n}<\sqrt{\frac{n}{2e}}$، لذا ماکسیموم مطلق f_n در $[0,1]$ برابر است با $\sqrt{\frac{n}{2e}}$. اکنون $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ را به متریک d، متریک القا شده از نُرم سوپریموم، مجهز کنید. داریم

$$d(f_n,0)=\|f_n\|=\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)|=\sqrt{\frac{n}{2e}}\nrightarrow 0.$$

پس $f_n\nrightarrow 0$ در $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ و لذا همگرایی f_n به صفر در $[0,1]$ یکنواخت نیست. ■

ج) **همگرایی f_n به صفر در $[0,1]$ یکنواخت است.** فرض کنید $\epsilon>0$ داده شده است. چون f در $x=1$ پیوسته است، پس $0<\delta<1$ موجود است طوری که برای هر $x\in(1-\delta,1]$، $|f(x)|=|f(x)-f(1)|<\epsilon$. از طرفی $0<\delta<1$ ایجاب می‌کند که $(1-\delta)^n\|f\|\to 0$ و در نتیجه عدد طبیعی N موجود است طوری که برای هر $n\ge N$، $(1-\delta)^n\|f\|<\epsilon$. اکنون فرض کنید $n\ge N$. برای هر $x\in[0,1]$، اگر $x\in[0,1-\delta]$، آنگاه

$$|f_n(x)|=|x^nf(x)|=x^n|f(x)|\le(1-\delta)^n\|f\|<\epsilon,$$

و اگر $x\in(1-\delta,1]$، آنگاه

$$|f_n(x)|=|x^nf(x)|=x^n|f(x)|\le|f(x)|<\epsilon.$$

پس با فرض $n\ge N$، برای هر $x\in[0,1]$ داریم $|f_n(x)|<\epsilon$ و لذا $f_n\rightrightarrows 0$ در $[0,1]$. ■

سؤال ۷: بنابر فرض عدد حقیقی مثبت M موجود است طوری که برای هر $n\ge 1$ و هر $t\in[a,b]$، $|f_n(t)|\le M$. فرض کنید $\epsilon>0$ داده شده است. قرار دهید $\delta=\frac{\epsilon}{M}$. در این صورت برای هر $n\ge 1$ و هر $x,y\in[a,b]$، $|x-y|<\delta$ ایجاب می‌کند که

$$|F_n(x)-F_n(y)|=\left|\int_a^x f_n(t)dt-\int_a^y f_n(t)dt\right|$$

$$=\left|\int_y^x f_n(t)dt\right|\le\left|\int_y^x |f_n(t)|dt\right|\le\left|\int_y^x Mdt\right|$$

$$=M|x-y|<M\delta=\epsilon.$$

پس (F_n) خانواده‌ای هم‌پیوسته از توابع است. از طرفی برای هر $n\ge 1$ و هر $x\in[a,b]$،

$$|F_n(x)|=\left|\int_a^x f_n(t)dt\right|\le\int_a^x|f_n(t)|dt$$

$$\leq \int_a^x M dt \ = M(x-a) \leq M(b-a),$$

که نشان می‌دهد (F_n) خانواده‌ای به‌طور یکنواخت کراندار است. پس بنابر قضیهٔ آرزلا—آسکولی، (F_n) زیردنباله‌ای به‌طور یکنواخت همگرا دارد. چون F_n ها پیوسته‌اند و همگرایی یکنواخت است، پس تابع حدی نیز پیوسته خواهد بود. ■

سؤال ۸: $\mathcal{C}^\circ([a,b],\mathbb{R})$ را به متریک d، متریک القا شده از نُرم سوپریموم، مجهز کنید. فرض کنید $\mathcal{A}$ مجموعهٔ تمام توابع $p \in \mathcal{C}^\circ([a,b],\mathbb{R})$ باشد که چندجمله‌ایی با ضرایب حقیقی و با ضابطه‌ای به صورت

$$p(x) = a_\circ + a_۳ x^۳ + a_۶ x^۶ + \cdots + a_{۳n} x^{۳n}$$

هستند. به راحتی می‌توان نشان داد که $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}^\circ([a,b],\mathbb{R})$ یک جبر توابع است که هیچ‌جا صفر نمی‌شود و نقاط $[a,b]$ را از هم جدا می‌سازد. پس بنابر قضیهٔ استون—وایرشتراس، $\mathcal{A}$ در $\mathcal{C}^\circ([a,b],\mathbb{R})$ چگال است. هم‌چنین، با استفاده از فرض به راحتی نتیجه می‌شود که برای هر $p \in \mathcal{A}$،

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = \circ.$$

فرض کنید $\epsilon > \circ$ داده شده است. چون $f \in \mathcal{C}^\circ([a,b],\mathbb{R})$، لذا چگال بودن $\mathcal{A}$ در $\mathcal{C}^\circ([a,b],\mathbb{R})$ ایجاب می‌کند که $p \in \mathcal{A}$ وجود دارد طوری که $d(f,p) < \frac{\epsilon}{(b-a)\|f\|}$ (در اینجا فرض کرده‌ایم که $\|f\| \neq \circ$، زیرا در غیر این صورت $f = \circ$ بر $[a,b]$ و حکم برقرار است). درنتیجه

$$\left|\int_a^b f^۲(x)dx\right| = \left|\int_a^b f(x)(f(x)-p(x))dx\right|$$

$$\leq \int_a^b |f(x)| \ |f(x)-p(x)|dx$$

$$\leq \int_a^b \|f\| \ \|f-p\|dx = (b-a)\|f\|d(f,p) < \epsilon.$$

چون ϵ دلخواه بود، پس

$$\int_a^b f^۲(x)dx = \circ$$

و چون $f^۲$ پیوسته است و $f^۲ \geq \circ$، لذا بنابر قضیهٔ خوانده شده $f^۲ = \circ$ بر $[a,b]$. این نیز نتیجه می‌دهد که $f = \circ$ بر $[a,b]$. ■