به‌نام خدا

دانشکدهٔ علوم ریاضی

تاریخ امتحان: ۹۰/۹/۱۰
مدّت امتحان: ۴ ساعت

امتحان میان‌ترم جبر پیشرفته

۲۲ − ۲۲۶+

نیمسال اوّل ۹۰–۹۱

توجه: در این امتحان منظور از حلقه، حلقهٔ یکدار است که در آن $1 \neq 0$. برای هر زیرحلقهٔ S از حلقهٔ R، $1_S = 1_R$ و برای هر هم‌ریختی حلقه‌ای $\varphi : R \longrightarrow R'$، $\varphi(1_R) = 1_{R'}$.

سؤال ۱. فرض کنید R حلقه و M یک R−مدول غیرصفر و متناهی مولد باشد. ثابت کنید اگر L زیرمدول سره‌ای از M باشد، آنگاه زیرمدول ماکسیمالی از M موجود است که شامل L است.

سؤال ۲. صورت قضیهٔ تناظر را بنویسید و آن را ثابت کنید.

سؤال ۳. فرض کنید R حلقه، M یک R−مدول و $\varphi : M \longrightarrow M$ یک R−هم‌ریختی باشد. ثابت کنید اگر $\varphi = \varphi^2$، آنگاه $M = \operatorname{Ker}\varphi \oplus \operatorname{Im}\varphi$.

سؤال ۴. فرض کنید R حلقه و M_1 ،M و M_2، R−مدول باشند. ثابت کنید اگر دنبالهٔ دقیق کوتاه

$$o \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M_2 \longrightarrow o$$

شکافته شود، آنگاه زیرمدولی مثل N از M موجود است که $M = \varphi(M_1) \oplus N$.

سؤال ۵. فرض کنید R حلقه، M یک R−مدول و $\{N_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای ناتهی از R−مدول‌ها باشد. ثابت کنید

$$\operatorname{Hom}_R\Big(M, \prod_{i\in I} N_i\Big) \underset{\mathbb{Z}}{\cong} \prod_{i\in I} \operatorname{Hom}_R(M, N_i).$$

سؤال ۶. گروه آبلی $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ را شناسایی کنید.

سؤال ۷. فرض کنید R حلقه، M یک R−مدول راست و N یک R−مدول چپ باشد. ثابت کنید به‌ازای هر $\mathbb{Z}$−مدول مثل L و هر تابع خطی میانی مثل $f : M \times N \longrightarrow L$، $\mathbb{Z}$−هم‌ریختی منحصر به فردی مثل $\varphi : M \underset{R}{\otimes} N \longrightarrow L$ موجود است که نمودار

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "f"'] & M \underset{R}{\otimes} N \arrow[dl, "\varphi"] \\ L & \end{tikzcd}$$

را جابه‌جایی می‌کند.

سؤال ۸. فرض کنید R حلقه و I و J دو ایده‌آل از R باشند. ثابت کنید $\frac{R}{I} \underset{R}{\otimes} \frac{R}{J} \underset{R}{\cong} \frac{R}{I+J}$.

سؤال ۹. با استفاده از دنبالهٔ دقیق کوتاه

$$o \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{j} \mathbb{Q} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow o,$$

نشان دهید تابعگون $\mathbb{Z}_۲ \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} -$ دقیق چپ نمی‌باشد.

سؤال ۱۰. ثابت کنید اگر R حلقهٔ جابه‌جایی و F یک $R-$مدول آزاد باشد، آنگاه عدد اصلی هر دو پایهٔ F برابر است و سپس با مثالی نشان دهید که فرض جابه‌جایی بودن حلقه را نمی‌توان در این گزاره حذف کرد.

سؤال ۱۱. فرض کنید R یک حلقه باشد. ثابت کنید هر $R-$مدول آزاد، پروژکتیو است و سپس با مثالی نشان دهید که عکس این گزاره درست نمی‌باشد.

سؤال ۱۲. فرض کنید R حلقه و P یک $R-$مدول چپِ متناهی مولد و پروژکتیو باشد. ثابت کنید $\mathrm{Hom}_R(P,R)$ دارای ساختار $R-$مدول راستی است که با این ساختار متناهی مولد و پروژکتیو می‌باشد.

توزیع نمره. سؤال‌های ۱، ۲، ۴، ۵، ۱۰ و ۱۱ هر کدام ۷ نمره،
سؤال‌های ۳، ۶، ۸، ۹ و ۱۲ هر کدام ۱۰ نمره،
سؤال ۷، ۸ نمره.

مجموع: ۱۰۰ نمره