به‌نام خدا

دانشکدهٔ علوم ریاضی

تاریخ امتحان: ۹۰/۱۰/۱۷
مدّت امتحان: ۳/۵ ساعت

امتحان پایان‌ترم جبر پیشرفته

۲۲ – ۲۲۶+

نیمسال اوّل ۹۱–۹۰

توجه: در این امتحان منظور از حلقه، حلقهٔ یکدار است که در آن $۱ \neq ۰$. برای هر زیرحلقهٔ S از حلقهٔ R، $۱_S = ۱_R$ و برای هر هم‌ریختی حلقه‌ای $\varphi : R \longrightarrow R'$، $\varphi(۱_R) = ۱_{R'}$.

سؤال ۱. فرض کنید R حلقه، M یک R–مدول و E توسیع انژکتیوی از M باشد. ثابت کنید زیرمدولی مثل N از E موجود است که توسیع اساسی ماکسیمال M است.

سؤال ۲. فرض کنید R یک حلقهٔ جابه‌جایی و I ایده‌آل سره‌ای از آن باشد. ثابت کنید

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \\ I \subseteq \mathfrak{p}}} \mathfrak{p}.$$

سؤال ۳. صورت قضیهٔ کوهن را بنویسید و آن را ثابت کنید.

سؤال ۴. فرض کنید R حلقه و M یک R–مدول نیم‌ساده و غیرصفر باشد. ثابت کنید M شامل زیرمدولی ساده می‌باشد و نتیجه بگیرید M مجموع مستقیمی از زیرمدول‌های سادهٔ خود است.

سؤال ۵. فرض کنید R حلقه، M یک R–مدول و $x_۱، \ldots، x_n$ عضوهایی از M باشند. هم‌چنین E را نیز R–مدولی انژکتیو در نظر بگیرید و فرض کنید $e \in E$. ثابت کنید اگر $\operatorname{Ann}(x_۱) \cap \cdots \cap \operatorname{Ann}(x_n) \subseteq \operatorname{Ann}(e)$، آنگاه عضوهایی از $\operatorname{Hom}_R(M, E)$ مثل $\varphi_۱، \ldots، \varphi_n$ موجودند که $e = \varphi_۱(x_۱) + \cdots + \varphi_n(x_n)$.

سؤال ۶. فرض کنید R یک حوزهٔ صحیحِ نامتناهی باشد با این ویژگی که فقط تعدادی متناهی عضو یکّه دارد. ثابت کنید $J(R) = o$ و نتیجه بگیرید $|\operatorname{Max}(R)| = \infty$.

سؤال ۷. فرض کنید R حلقه، M یک R–مدول نوتری و $\varphi : M \longrightarrow M$ یک R–هم‌ریختی پوشا باشد. ثابت کنید φ یک‌به‌یک است.

سؤال ۸. فرض کنید R یک حلقهٔ ابتدایی چپ باشد طوری که به‌ازای هر عضو از R مثل a، $۱ + a^۲$ عضوی یکّه است. ثابت کنید R حلقهٔ تقسیم است.

توزیع نمره. سؤال‌های ۲ و ۳ هر کدام ۱۴ نمره و بقیهٔ سؤال‌ها هر کدام ۱۲ نمره دارند.

مجموع: ۱۰۰ نمره