به‌نام خدا

دانشکدهٔ علوم ریاضی

امتحان میان‌ترم جبر ۳

۲۲ − ۲۰۹

نیمسال اوّل ۹۱—۹۰

تاریخ امتحان: ۹۰/۹/۳
مدّت امتحان: ۲/۵ ساعت

سؤال ۱. ثابت کنید هر حوزهٔ اقلیدسی یک حوزهٔ ایده‌آلِ اصلی است.

سؤال ۲. فرض کنید D یک حوزهٔ ایده‌آلِ اصلی و $I_۱ \subseteq I_۲ \subseteq I_۳ \subseteq \cdots$ زنجیری صعودی از ایده‌آل‌های D باشد. ثابت کنید عدد طبیعی k وجود دارد با این ویژگی که برای هر $n \geq k$، $I_n = I_k$.

سؤال ۳. فرض کنید میدان L توسیعی از میدان K باشد و $\mathcal{A}(L)$ را مجموعهٔ تمام اعضایی از L در نظر بگیرید که روی K جبری هستند. ثابت کنید $\mathcal{A}(L)$ زیرمیدانی از L است.

سؤال ۴. فرض کنید K یک میدان و $m \in K[X]$ یک چندجمله‌ای تکین و تحویل‌ناپذیر روی K باشد. ثابت کنید توسیع L از K و نیز عضو $\alpha \in L$ وجود دارد با این ویژگی که m چندجمله‌ای مینیموم α روی K است. هم‌چنین نشان دهید $L = K[\alpha]$.

سؤال ۵. نشان دهید چندجمله‌ای $f = X^۴ + ۴X^۳ + ۳X^۲ - ۲X + ۴ \in \mathbb{Z}[X]$ روی $\mathbb{Q}$ تحویل‌ناپذیر است.

سؤال ۶. فرض کنید میدان L توسیعی از میدان K باشد با این ویژگی که $[L : K] = ۲$ و $\beta \in L \setminus K$. ثابت کنید $L = K(\beta)$ و نیز چندجمله‌ای مینیموم β روی K از درجهٔ ۲ می‌باشد.

سؤال ۷. نشان دهید $\mathbb{Q}(\sqrt{۲}, \sqrt{۵}) = \mathbb{Q}[\sqrt{۲} + \sqrt{۵}]$. سپس چندجمله‌ای مینیموم $\sqrt{۲} + \sqrt{۵}$ را به ترتیب روی $\mathbb{Q}$، $\mathbb{Q}[\sqrt{۲}]$ و $\mathbb{Q}[\sqrt{۵}]$ به دست آورید.

توزیع نمره. سؤال‌های ۱ تا ۴ هر کدام ۱۱ نمره و بقیهٔ سؤال‌ها هر کدام ۱۲ نمره دارند.

مجموع: ۸۰ نمره