



تاریخ امتحان: ۹۱/۹/۲۳  
مدت امتحان: ۲ ساعت و نیم

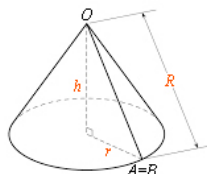
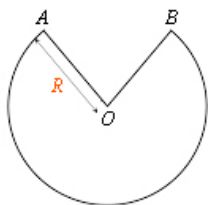
امتحان میان‌ترم ریاضی عمومی ۱

۲۲ - ۰۱۵

نیمسال اول ۹۲-۹۱

- این امتحان شامل ۶ سؤال است. پاسخ سؤالات را به ترتیب در کتابچه امتحانی بنویسید و در هر برگه کتابچه فقط و فقط به یک سؤال پاسخ دهید.
- برای نشان دادن درستی جواب‌های خود استدلال کنید و از به کار بردن عباراتی چون «واضح است» یا «بدیهی است» پرهیز کنید.
- استفاده از ماشین حساب در طول جلسه امتحان ممنوع است.
- در طول جلسه امتحان به هیچ سؤالی پاسخ داده نمی‌شود.

**سؤال ۱.** از دایره‌ای به شعاع ثابت  $R$  قطاعی جدا می‌کنیم و با برهم نهادن  $OA$  و  $OB$  قیفی می‌سازیم (مانند شکل زیر). با عوض شدن قطاع‌ها، قیف‌های مختلفی به دست می‌آید. در بین این قیف‌ها، بیشترین حجمی که یک قیف می‌تواند داشته باشد را محاسبه کنید.

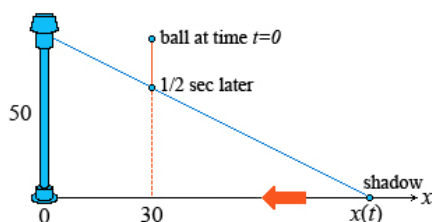


**سؤال ۲.** ناحیه محصور به منحنی‌های  $y = \sin x$  و  $y = \cos x$  و محور  $x$  ( $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ ) را در نظر می‌گیریم.

الف) مساحت ناحیه مذکور را محاسبه کنید.

ب) ناحیه مذکور را حول محور  $x$  دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل را محاسبه کنید.

**سؤال ۳.** چراغی بر روی یک تیرک در ارتفاع  $50$  فوتی از سطح زمین روشن است. تویی را که در همان ارتفاع از زمین و در فاصله  $30$  فوتی از چراغ واقع است رها می‌کنیم. با فرض این که توپ در  $t$  ثانیه اول مسافت  $s = 16t^2$  را طی می‌کند، سرعت حرکت سایه توپ بر روی زمین را در  $\frac{1}{4}$  ثانیه بعد از رها شدن توپ محاسبه کنید (سرعت حرکت، همان آهنگ تغییر مسافت نسبت به زمان است).



سؤال ۴. حاصل حد زیر را محاسبه کنید:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{n}{1^2 + n^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{n}{2^2 + n^2} \right)^2 + \dots + n \left( \frac{n}{n^2 + n^2} \right)^2 \right).$$

سؤال ۵. تابع  $f: [0, \frac{\pi}{4}] \rightarrow \mathbb{R}$  با ضابطه زیر تعریف شده است:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & : 0 < x \leq \frac{\pi}{4}, \\ 1 & : x = 0. \end{cases}$$

الف) نشان دهید  $f$  تابعی نزولی است.

ب) نشان دهید  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx \geq 1$ .

سؤال ۶. فرض کنید  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی دوبار مشتق پذیر باشد. نشان دهید  $c \in (-1, 1)$  وجود دارد با این ویژگی که  $f(1) - 2f(0) + f(-1) = f''(c)$ . (راهنمایی: می‌توانید از تابع  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  با ضابطه  $g(x) = f(x+1) - f(x)$  استفاده کنید.)

توزیع نمره. سؤال ۱: ۲۰ نمره، سؤال ۲: ۱۰+۵ نمره، سؤال ۳: ۱۵ نمره، سؤال ۴: ۱۵ نمره، سؤال ۵: ۱۰+۱۵ نمره، سؤال ۶: ۱۰ نمره.

مجموع: ۱۰۰ نمره