به‌نام خدا

دانشکدهٔ علوم ریاضی

حل مسائل امتحان میان‌ترم ریاضی عمومی ۱

۹۱/۹/۲۳

سؤال ۱: حجم هر کدام از قیف‌های قابل ساخت بر حسب h برابر است با

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(R^2-h^2)h = \frac{1}{3}\pi(R^2h-h^3).$$

در نتیجه مقادیر تابع $V:[0,R]\longrightarrow\mathbb{R}$ با ضابطهٔ

$$V(h)=\frac{1}{3}\pi(R^2h-h^3)$$

حجم قیف‌های مختلف را به دست می‌دهد. چون V در بازهٔ $[0,R]$ تابعی پیوسته می‌باشد، لذا در این بازه ماکسیموم مطلق دارد. برای محاسبهٔ ماکسیموم مطلق تابع V در بازهٔ $[0,R]$، توجه می‌کنیم که

$$V'(h)=\frac{1}{3}\pi(R^2-3h^2)$$

در این بازه به ازای $h=\frac{R}{\sqrt{3}}$ صفر می‌شود. چون $V(0)=0$، $V(R)=0$ و $V(\frac{R}{\sqrt{3}})=\frac{2}{9\sqrt{3}}\pi R^3$، لذا ماکسیموم مطلق تابع V در بازهٔ $[0,R]$ برابر است با $\frac{2}{9\sqrt{3}}\pi R^3$ که همان بیشترین حجمی است که یک قیف می‌تواند در بین قیف‌های ساخته شده داشته باشد. ■

سؤال ۲: الف) دو منحنی یکدیگر را در نقطه‌ای به طول $\frac{\pi}{4}$ قطع می‌کنند. در نتیجه مساحت مطلوب برابر است با

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2-\sqrt{2}.\ ■$$

ب) حجم جسم مطلوب نیز برابر است با

$$\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,dx+\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 2x)dx+\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

■

سؤال ۳: با استفاده از تشابه مثلث‌ها می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{x(t)-30}{x(t)}=\frac{50-16t^2}{50}$$

که ایجاب می‌کند

$$x(t)=\frac{375}{4t^2}.$$

در نتیجه سرعت مطلوب برابر است با

$$x'(t)\Big|_{t=\frac{1}{2}}=-\frac{375}{2t^3}\Big|_{t=\frac{1}{2}}=-1500.\ ■$$

سؤال ۴: حاصل حد مطلوب برابر است با

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} i\left(\frac{n}{i^2+n^2}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} i\left(\frac{\frac{1}{n}}{(\frac{i}{n})^2+1}\right)^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n}}{((\frac{i}{n})^2+1)^2}=\int_0^1\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$=\frac{-1}{2(x^2+1)}\Big]_0^1=\frac{-1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.\ ■$$

سؤال ۵: الف) فرض کنید $0<x<\frac{\pi}{2}$ دلخواه باشد و آن را تثبیت کنید. بنابر قضیهٔ مقدار میانگین، $0<\xi<x$ موجود است طوری که

$$\sin x=\sin x-\sin 0=x\cos\xi.$$

مجدداً بنابر قضیهٔ مقدار میانگین، $\xi<\eta<x$ موجود است طوری که

$$\cos x-\cos\xi=(x-\xi)(-\sin\eta).$$

در نتیجه

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{x\cos x-x\cos\xi}{x^2}$$

$$=\frac{\cos x-\cos\xi}{x}=\frac{(x-\xi)(-\sin\eta)}{x}<0.$$

پس نشان دادیم که برای هر $0<x<\frac{\pi}{2}$، $f'(x)<0$. لذا f روی بازهٔ $(0,\frac{\pi}{2})$ تابعی نزولی است و چون f روی بازهٔ $[0,\frac{\pi}{2}]$ پیوسته است در نتیجه لزوماً f روی $[0,\frac{\pi}{2}]$ تابعی نزولی است. ■

ب) چون f روی $[0,\frac{\pi}{2}]$ نزولی است، پس برای هر $0\le x\le\frac{\pi}{2}$، $f(x)\ge f(\frac{\pi}{2})$ یا $f(x)\ge\frac{2}{\pi}$. در نتیجه

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx\ge\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{\pi}\,dx=1.\ ■$$

سؤال ٦: می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} f(1)-2f(0)+f(-1) &= (f(1)-f(0))-(f(0)-f(-1)) \\ &= g(0)-g(-1). \end{aligned}$$

با استفاده از قضیهٔ مقدار میانگین برای تابع g، $-1 < \xi < 0$ موجود است طوری که

$$g(0)-g(-1) = (0-(-1))g'(\xi) = f'(\xi+1)-f'(\xi),$$

و لذا

$$f(1)-2f(0)+f(-1) = f'(\xi+1)-f'(\xi).$$

همچنین، با استفادهٔ مجدد از قضیهٔ مقدار میانگین، این بار برای تابع f'، $\xi < c < \xi+1$ موجود است طوری که

$$f'(\xi+1)-f'(\xi) = (\xi+1-\xi)f''(c) = f''(c).$$

در نتیجه c طوری است که $-1 < c < 1$ و

$$f(1)-2f(0)+f(-1) = f''(c). \blacksquare$$