به‌نام خدا

دانشکدهٔ علوم ریاضی

امتحان میان‌ترم آنالیز حقیقی

۲۲ – ۴۱۲+

نیمسال اوّل ۹۲–۹۱

تاریخ امتحان: ۹۱/۹/۹
مدّت امتحان: ۵ ساعت

توجه: در سؤالات زیر منظور از اندازه و انتگرال، اندازه و انتگرال لُبگ است.

سؤال ۱. درستی هر یک از احکام زیر را ثابت کنید. برای اثبات درستی (ب) از (الف)، برای اثبات درستی (ج) از (ب) و برای اثبات درستی (د) از (ج) استفاده کنید.

الف) فرض کنید E زیرمجموعه‌ای اندازه‌پذیر از $\mathbb{R}$ باشد. در این صورت برای هر $\epsilon > 0$، زیرمجموعهٔ باز O از $\mathbb{R}$ موجود است طوری که $E \subseteq O$ و $m^*(O \setminus E) < \epsilon$.

ب) فرض کنید E زیرمجموعه‌ای اندازه‌پذیر از $\mathbb{R}$ باشد. در این صورت برای هر $\epsilon > 0$، زیرمجموعهٔ بستهٔ C از $\mathbb{R}$ موجود است طوری که $C \subseteq E$ و $m^*(E \setminus C) < \epsilon$.

ج) فرض کنید E زیرمجموعه‌ای اندازه‌پذیر از $\mathbb{R}$ باشد با این ویژگی که $m^*(E) < \infty$. در این صورت برای هر $\epsilon > 0$، زیرمجموعهٔ فشردهٔ F از $\mathbb{R}$ موجود است طوری که $F \subseteq E$ و $m^*(E \setminus F) < \epsilon$.

د) فرض کنید E زیرمجموعه‌ای اندازه‌پذیر از $\mathbb{R}$ باشد با این ویژگی که $m^*(E) < \infty$. در این صورت $m^*(E) = m_*(E)$.

سؤال ۲. صورت قضیهٔ لوزین را بنویسید و آن را ثابت کنید.

سؤال ۳. درستی هر یک از احکام زیر را ثابت کنید. برای اثبات درستی (ب) از (الف) و برای اثبات درستی (ج) از (ب) استفاده کنید.

الف) فرض کنید E زیرمجموعه‌ای اندازه‌پذیر از $\mathbb{R}$ باشد با این ویژگی که $m(E) < \infty$. اگر $\phi, \psi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ دو تابع ساده باشند، آنگاه $\int_E (\phi + \psi) = \int_E \phi + \int_E \psi$.

ب) فرض کنید E زیرمجموعه‌ای اندازه‌پذیر از $\mathbb{R}$ باشد با این ویژگی که $m(E) < \infty$. اگر $f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ دو تابع کراندار و اندازه‌پذیر باشند، آنگاه $\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g$.

ج) فرض کنید E زیرمجموعه‌ای اندازه‌پذیر از $\mathbb{R}$ باشد. اگر $f, g : E \longrightarrow [0, \infty]$ دو تابع اندازه‌پذیر باشند، آنگاه $\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g$.

سؤال ۴. صورت لم و دو قضیهٔ زیر را بنویسید و آن‌ها را ثابت کنید. برای اثبات درستی (ب) و (ج) از (الف) استفاده کنید.

الف) لم فاتو ب) قضیهٔ همگرایی یکنوا ج) قضیهٔ همگرایی تسلطی لُبگ

سؤال ۵. هر یک از احکام زیر را که درست است ثابت کنید و برای هر یک که نادرست است مثالی ناقض بیاورید.

الف) فرض کنید E زیرمجموعه‌ای اندازه‌پذیر از $\mathbb{R}$ با $m(E)=۱$ باشد. در این صورت، زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر A از E موجود است طوری که $m(A)=\frac{۱}{۲}$.

ب) فرض کنید $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعی باشد با این ویژگی که $|f|$ اندازه‌پذیر است. در این صورت f نیز اندازه‌پذیر است.

ج) فرض کنید E زیرمجموعه‌ای اندازه‌پذیر از $\mathbb{R}$، (f_n) دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر از E به $[-\infty,\infty]$ و f تابعی از E به $[-\infty,\infty]$ باشد. اگر $\lim_{n\to\infty} f_n=f$ تقریباً همه جا روی E، آنگاه $\lim_{n\to\infty} f_n=f$ در اندازه روی E.

د) فرض کنید $f:[۰,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد با این ویژگی که $\lim_{x\to\infty} f(x)=\delta$. در این صورت $\lim_{n\to\infty}\int_۰^a f(nx)dx=a\delta$.

سؤال ٦. فرض کنید $f:[۰,۱]\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعی باشد که چنین تعریف می‌شود: اگر x عددی گویا باشد، آنگاه $f(x)=۰$ و اگر x عددی گنگ باشد که در نمایش اعشاری آن در مبنای ده، n صفر بعد از ممیز و قبل از اوّلین عدد غیرصفر بعد از ممیز ظاهر شده باشد، آنگاه $f(x)=n$. ثابت کنید f روی $[۰,۱]$ انتگرال‌پذیر است و حاصل انتگرال $\int_۰^۱ f$ را محاسبه کنید.

سؤال ۷. فرض کنید $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعی باشد با این ویژگی: برای هر $\epsilon>۰$، زیرمجموعهٔ باز U از $\mathbb{R}$ موجود است طوری که $m(U)<\epsilon$ و f روی $\mathbb{R}\setminus U$ پیوسته است. ثابت کنید f روی $\mathbb{R}$ اندازه‌پذیر است.

سؤال ۸. حاصل حد $\lim_{n\to\infty}\int_۰^n\left(۱+\frac{x}{n}\right)^n e^{-۲x}\,dx$ را محاسبه کنید.

توزیع نمره. سؤال ۱: ۱۰+۱۰+۵+۱۰+۱۰ نمره، سؤال ۲: ۱۵ نمره،
سؤال ۳: ۱۰+۱۰+۱۰ نمره، سؤال ۴: ۱۵+۱۰+۱۵ نمره،
سؤال ۵: ۱۰+۱۰+۱۰+۱۰ نمره، سؤال ٦: ۱۵ نمره،
سؤال ۷: ۱۵ نمره، سؤال ۸: ۱۰ نمره.

مجموع: ۲۰۰ نمره