به‌نام خدا

دانشکدهٔ علوم ریاضی

امتحان پایان‌ترم آنالیز حقیقی

---

۲۲ – ۴۱۲+

نیمسال اوّل ۹۲–۹۱

تاریخ امتحان: ۹۱/۱۰/۲۸
مدّت امتحان: ۳/۵ ساعت

توجه: در سؤالات زیر منظور از اندازه و انتگرال، اندازه و انتگرال لُبگ است.

سؤال ۱. فرض کنید $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعی صعودی باشد. بنابر قضیهٔ لُبگ–یانگ، می‌دانیم f تقریباً همه جا روی $[a,b]$ مشتق‌پذیر است. ثابت کنید f' روی $[a,b]$ اندازه‌پذیر است و $\int_a^b f' \leq f(b)-f(a)$.

سؤال ۲. فرض کنید f تابعی حقیقی باشد که روی $[a,b]$ مطلقاً پیوسته است. ثابت کنید اگر $f'=0$ تقریباً همه جا روی $[a,b]$، آنگاه f تابعی ثابت روی $[a,b]$ است.

سؤال ۳. صورت قضیهٔ ریتس–فیشر را بنویسید و آن را ثابت کنید.

سؤال ۴. صورت قضیهٔ نگاشت باز را بنویسید و آن را ثابت کنید.

سؤال ۵. فرض کنید (f_n) دنباله‌ای از توابع حقیقی مطلقاً پیوسته روی $[0,1]$ باشد طوری که به ازای هر n، $f_n(0)=0$. اگر (f_n') دنباله‌ای کشی در $L^1([0,1])$ باشد، ثابت کنید f_n در $[0,1]$ به‌طور یکنواخت به تابعی مطلقاً پیوسته روی $[0,1]$ همگراست.

سؤال ۶. فرض کنید f تابعی حقیقی باشد طوری که روی هر بازه از $\mathbb{R}$ مطلقاً پیوسته است. اگر هر دوی f و f' در $L^1(\mathbb{R})$ باشند، حاصل انتگرال $\int_{\mathbb{R}} f'$ را محاسبه کنید.

سؤال ۷. فرض کنید $1<p<\infty$ و $1<q<\infty$ دو عدد حقیقی باشند طوری که $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. اگر (f_n) دنباله‌ای در $L^p([0,1])$ باشد طوری که $\lim_{n\to\infty} f_n=f$ در $L^p([0,1])$ و (g_n) دنباله‌ای در $L^q([0,1])$ باشد طوری که $\lim_{n\to\infty} g_n=g$ در $L^q([0,1])$، آیا می‌توان نتیجه گرفت $\lim_{n\to\infty} f_n g_n=fg$ در اندازه روی $[0,1]$؟ چرا؟

سؤال ۸. فرض کنید $f:[0,1]\longrightarrow[0,\infty)$ تابعی در $L^\infty([0,1])$ باشد طوری که $\|f\|_\infty>0$. ثابت کنید

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1 f^{n+1}}{\int_0^1 f^n}=\|f\|_\infty.$$

توزیع نمره. هر سؤال ۲۵ نمره دارد.

مجموع: ۲۰۰ نمره