



تاریخ امتحان: ۹۳/۲/۴
مدت امتحان: ۳ ساعت

امتحان میان‌ترم ریاضی عمومی ۱

۲۲ - ۰۱۵

نیمسال دوم ۹۳-۹۲

- این امتحان شامل ۶ سؤال است. پاسخ سؤالات را به ترتیب در کتابچه امتحانی بنویسید و در هر برگه کتابچه فقط و فقط به یک سؤال پاسخ دهید.
- برای نشان دادن درستی جواب‌های خود استدلال کنید و از به کار بردن عباراتی چون «واضح است» یا «بدیهی است» پرهیز کنید.
- استفاده از ماشین حساب در طول جلسه امتحان ممنوع است.

سؤال ۱. فرض کنید z_1 و z_2 و z_3 سه عدد مختلط باشند طوری که $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ و $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. نشان دهید $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$.

سؤال ۲. فرض کنید $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$. نشان دهید $c \in [a, b]$ وجود دارد طوری که

$$f(c) = \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

سؤال ۳. فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی باشد طوری که $f(0) = 1$ و نیز برای هر $a, b \in \mathbb{R}$ $f(a+b) = f(a)f(b)$. نشان دهید اگر f در نقطه صفر مشتق‌پذیر باشد و $f'(0) = c$ ، آنگاه f در هر نقطه $x \in \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و $f'(x) = cf(x)$.

سؤال ۴. تابع $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = 5x^4 - 3x^2 - 1$ را در نظر بگیرید. ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق f را در $[-1, 1]$ به دست آورید. نتیجه بگیرید که برای هر $a, b \in [-1, 1]$

$$|(b^5 - a^5) - (b^2 - a^2) - (b - a)| \leq 1/45 |b - a|.$$

سؤال ۵. مثلث‌های قائم‌الزاویه مختلفی وجود دارند که طول وتر آن‌ها مقدار ثابت $c > 0$ است. در بین مثلث‌های مذکور، بیشترین مساحت ممکن چقدر است؟ کدام مثلث قائم‌الزاویه این بیشترین مساحت ممکن را دارد؟

سؤال ۶. تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ را در نظر بگیرید. با استفاده از چند جمله‌ای تیلور مرتبه دو، مقدار تقریبی $\sqrt{1/1}$ را محاسبه کنید. حداکثر خطا در این محاسبه چقدر است؟

توزیع نمره. سؤال‌های ۱، ۲، ۳، ۵: هر کدام ۱۵ نمره، سؤال‌های ۴، ۶: هر کدام ۲۰ نمره.

مجموع: ۱۰۰ نمره