به‌نام خدا

دانشکدهٔ علوم ریاضی

امتحان میان‌ترم آنالیز حقیقی

تاریخ امتحان: ۹۳/۹/۶
مدّت امتحان: ۴ ساعت

$۲۲ - ۴۱۲^{+}$

نیمسال اوّل ۹۴–۹۳

توجه: در سؤالات زیر منظور از اندازه و انتگرال، اندازه و انتگرال لبگ است.

سؤال ۱. ثابت کنید برای هر خانوادهٔ $\{A_n\}_{n=۱}^{\infty}$ از زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$، نامساوی $m^*\Big(\bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n\Big) \leq \sum_{n=۱}^{\infty} m^*(A_n)$ برقرار است.

سؤال ۲. فرض کنید E زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشد با این ویژگی که $m^*(E) < \infty$. ثابت کنید E اندازه‌پذیر است اگر و فقط اگر برای هر $\epsilon > ۰$، زیرمجموعهٔ باز U از $\mathbb{R}$ موجود باشد طوری که اجتماع تعدادی متناهی بازهٔ باز دوبه‌دو مجزا است و $m^*(E \bigtriangleup U) < \epsilon$.

سؤال ۳. فرض کنید E زیرمجموعه‌ای اندازه‌پذیر از $\mathbb{R}$ باشد و (f_n) را دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر از E به $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ در نظر بگیرید طوری که $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ در اندازه روی E. ثابت کنید زیردنبالهٔ (f_{n_k}) از (f_n) وجود دارد که $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k} = f$ نقطه‌وار روی E تقریباً همه جا.

سؤال ۴. صورت قضیهٔ همگرایی تسلطی لبگ را بنویسید و آن را ثابت کنید.

سؤال ۵. فرض کنید $f : [۰, ۱] \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی دلخواه باشد و $E \subseteq \{x \in [۰, ۱] \mid \text{موجود است } f'(x)\}$. ثابت کنید اگر E اندازه‌پذیر با اندازهٔ صفر باشد، آنگاه $f(E)$ نیز اندازه‌پذیر با اندازهٔ صفر است.

سؤال ۶. فرض کنید تابع $f : [۰, ۱] \longrightarrow \mathbb{R}$ چنین تعریف می‌شود: اگر x عددی گویا باشد، آنگاه $f(x) = ۰$ و اگر x عددی گنگ باشد، آنگاه $f(x) = ۱/(a^۲ + a)$ (در اینجا، a، اوّلین عدد ناصفر بعد از ممیز در نمایش اعشاری x در مبنای ده است). ثابت کنید f تابعی ساده است و حاصل انتگرال $\int_{[۰,۱]} f$ را محاسبه کنید.

سؤال ۷. فرض کنید (f_n) دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر و نامنفی از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ باشد و $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ نقطه‌وار روی $\mathbb{R}$ تقریباً همه جا. ثابت کنید اگر f روی $\mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر باشد و $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = \int_{\mathbb{R}} f$، آنگاه برای هر زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر E از $\mathbb{R}$، $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f$.

سؤال ۸. فرض کنید (f_n) دنباله‌ای از توابع از $(۰, \infty)$ به $\mathbb{R}$ باشد که در آن برای هر $n \in \mathbb{N}$، ضابطهٔ f_n به صورت $f_n(x) = x^{-\frac{۱}{n}}\left(۱ + \frac{x}{n}\right)^{-n}$ است. حاصل حد $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{(۰,\infty)} f_n$ را محاسبه کنید.

توزیع نمره. سؤال‌های ۱، ۳، ۴، ۶، ۸: هر کدام ۱۰ نمره، سؤال ۲: ۲۰ نمره، سؤال‌های ۵، ۷: هر کدام ۱۵ نمره.

مجموع: ۱۰۰ نمره