به‌نام خدا

دانشکدهٔ علوم ریاضی

امتحان پایان‌ترم آنالیز حقیقی	تاریخ امتحان: ۹۳/۱۰/۲۵
۲۲ – ۴۱۲+	مدّت امتحان: ۴ ساعت
نیمسال اوّل ۹۴–۹۳	

سؤال ۱. فرض کنید $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعی پیوستهٔ مطلق باشد. ثابت کنید اگر $f'=0$ روی (a,b) تقریباً همه جا، آنگاه f تابعی ثابت روی $[a,b]$ است. (در این سؤال، اندازه را اندازهٔ لبگ در نظر بگیرید.)

سؤال ۲. صورت قضیهٔ نگاشت باز را بنویسید و آن را ثابت کنید.

سؤال ۳. فرض کنید X یک فضای هیلبرت روی $\mathbb{R}$ باشد و $f:X\longrightarrow\mathbb{R}$ را یک تابعک خطی و کراندار روی X در نظر بگیرید. ثابت کنید عضوی منحصر به فرد مثل $y\in X$ وجود دارد طوری که برای هر $x\in X$، $f(x)=\langle x|y\rangle$. به علاوه، $\|f\|=\|y\|$.

سؤال ۴. فرض کنید $(X,\mathcal{A},\mu)$ و $(Y,\mathcal{B},\nu)$ دو فضای اندازهٔ σ–متناهی باشند و f را تابعی $(\mathcal{A}\times\mathcal{B})$–اندازه‌پذیر و نامنفی روی $X\times Y$ در نظر بگیرید. ثابت کنید

$$\int_{X\times Y} f\ d(\mu\times\nu)=\int_Y\left(\int_X f(x,y)\ d\mu(x)\right)d\nu(y)=\int_X\left(\int_Y f(x,y)\ d\nu(y)\right)d\mu(x).$$

سؤال ۵. فرض کنید (f_n) دنباله‌ای از توابع پیوستهٔ مطلق از $[0,1]$ به $\mathbb{R}$ باشد طوری که برای هر $n\in\mathbb{N}$، $f_n(0)=0$. ثابت کنید اگر دنبالهٔ (f_n') در فضای $L^1([0,1])$ دنباله‌ای کُشی باشد، آنگاه تابع پیوستهٔ مطلق $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ وجود دارد طوری که $\lim_{n\to\infty} f_n=f$ به‌طور یکنواخت روی $[0,1]$. (در این سؤال، اندازه را اندازهٔ لبگ در نظر بگیرید.)

سؤال ۶. فرض کنید X یک فضای خطی نُرم‌دار روی $\mathbb{R}$ باشد و $f:X\longrightarrow\mathbb{R}$ را یک تابعک خطی روی X در نظر بگیرید. ثابت کنید اگر هستهٔ f، یعنی $\ker(f)$، در X بسته باشد، آنگاه f پیوسته است.

سؤال ۷. فرض کنید X یک فضای هیلبرت روی $\mathbb{R}$ باشد و $T:X\longrightarrow X$ را یک عملگر خطی روی X در نظر بگیرید. ثابت کنید اگر برای هر $x,y\in X$، $\langle T(x)|y\rangle=\langle x|T(y)\rangle$، آنگاه T پیوسته است.

سؤال ۸. فرض کنید $(X,\mathcal{A},\mu)$ یک فضای اندازهٔ σ–متناهی باشد. ثابت کنید اندازهٔ λ روی فضای اندازه‌پذیر $(X,\mathcal{A})$ وجود دارد طوری که $\lambda(X)=1$ و نیز برای هر $E\in\mathcal{A}$، $\lambda(E)=0$ اگر و فقط اگر $\mu(E)=0$.

توزیع نمره. سؤال‌های ۱ تا ۴: هر کدام ۱۵ نمره،
سؤال‌های ۵ تا ۸: هر کدام ۱۰ نمره.

مجموع: ۱۰۰ نمره