به‌نام خدا

تاریخ: ۹۴/۹/۵
شماره: ....
پیوست: ....

دانشکدهٔ علوم ریاضی

امتحان میان‌ترم جبر پیشرفته

۲۲ − ۲۲۶+

نیمسال اوّل ۹۵–۹۴

مدّت امتحان: ۴ ساعت

توجه: در این امتحان منظور از حلقه، حلقهٔ یکدار است که در آن $1 \neq 0$. برای هر زیرحلقهٔ S از حلقهٔ R، $1_S = 1_R$ و برای هر هم‌ریختی حلقه‌ای $\varphi : R \longrightarrow R'$، $\varphi(1_R) = 1_{R'}$.

سؤال ۱. فرض کنید R یک حلقه و M، M_1 و M_2، R–مدول باشند. دنبالهٔ دقیق کوتاه زیر را در نظر بگیرید:

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M_2 \longrightarrow 0.$$

ثابت کنید R–هم‌ریختی‌ای مثل $\varphi' : M \longrightarrow M_1$ موجود است طوری که $\varphi'\varphi = 1_{M_1}$ اگر و فقط اگر R–هم‌ریختی‌ای مثل $\psi' : M_2 \longrightarrow M$ موجود باشد طوری که $\psi\psi' = 1_{M_2}$.

سؤال ۲. فرض کنید R یک حلقه، $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای ناتهی از R–مدول‌های راست و N یک R–مدول چپ باشد. ثابت کنید

$$\Big(\coprod_{i\in I} M_i\Big) \underset{R}{\otimes} N \ \underset{\mathbb{Z}}{\cong}\ \coprod_{i\in I}(M_i \underset{R}{\otimes} N).$$

سؤال ۳. ثابت کنید اگر R حلقهٔ جابه‌جایی و F یک R–مدول آزاد باشد، آنگاه عدد اصلی هر دو پایهٔ F برابر است و سپس با مثالی نشان دهید که فرض جابه‌جایی بودن حلقه را نمی‌توان در این گزاره حذف کرد.

سؤال ۴. صورت لم شانوئل را بنویسید و آن را ثابت کنید.

سؤال ۵. فرض کنید R حلقه و M یک R–مدول غیرصفر باشد. ثابت کنید اگر N زیرمدول سره‌ای از M باشد و $x \in M \setminus N$ موجود باشد با این ویژگی که $M = Rx + N$، آنگاه M زیرمدول ماکسیمالی دارد که شامل N است و x را در بر ندارد.

سؤال ۶. فرض کنید R یک حلقهٔ جابه‌جایی باشد و I را ایده‌آلی از آن در نظر بگیرید. ثابت کنید اگر M یک R–مدول متناهی مولد باشد و $\varphi : M \longrightarrow M$ یک R–هم‌ریختی با این ویژگی که $\varphi(M) \subseteq IM$، آنگاه $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in I$ موجودند که $\varphi^n + a_1\varphi^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\varphi + a_n 1_M = 0$.

سؤال ۷. فرض کنید R یک حلقهٔ جابه‌جایی باشد و I را ایده‌آلی از آن در نظر بگیرید. ثابت کنید اگر M یک R–مدول باشد، آنگاه $\mathrm{Hom}_R(R/I, M) \underset{R}{\cong} \mathrm{Ann}_M(I)$.

سؤال ۸. فرض کنید R حلقهٔ جابه‌جایی و موضعی، M یک R–مدول راست و N یک R–مدول چپ باشد. ثابت کنید اگر M و N غیرصفر و متناهی مولد باشند، آنگاه $M \underset{R}{\otimes} N \neq 0$.

توزیع نمره. سؤال‌های ۳ و ۶: هر کدام ۲۰ نمره،
بقیهٔ سؤال‌ها: هر کدام ۱۰ نمره.

مجموع: ۱۰۰ نمره