



تاریخ: ۹۴/۸/۲۸  
شماره: .....  
پیوست: .....

دانشکده علوم ریاضی

مدت امتحان: ۴ ساعت

امتحان میان‌ترم جبر ۱

۲۲-۲۱۷

نیمسال اول ۹۵-۹۴

**سؤال ۱.** فرض کنید  $G$  مجموعه‌ای ناتهی بوده و عمل ضرب شرکت‌پذیری روی  $G$  تعریف شده باشد طوری که برای هر دو عضو  $a$  و  $b$  از  $G$ ، معادلات  $ax = b$  و  $ya = b$  در  $G$  جواب داشته باشند. ثابت کنید  $G$  با این عمل ضرب یک گروه است.

**سؤال ۲.** فرض کنید  $G$  یک گروه باشد. اگر  $a \in G$  عضوی از مرتبه  $n$  باشد و  $k$  عددی صحیح، فرمول محاسبه  $o(a^k)$  را بنویسید و سپس درستی فرمول نوشته شده را ثابت کنید.

**سؤال ۳.** فرض کنید  $G$  یک گروه باشد. اگر  $H$  و  $K$  دو زیرگروه متناهی از  $G$  باشند، فرمول محاسبه  $|HK|$  را بنویسید و سپس درستی فرمول نوشته شده را ثابت کنید.

**سؤال ۴.** فرض کنید  $G$  یک گروه باشد. اگر  $H$  و  $K$  دو زیرگروه از  $G$  باشند، ثابت کنید  $|H : H \cap K| \leq |G : K|$ .  
با فرض  $|G : K| < \infty$ ، نشان دهید در نابرابری بالا تساوی رخ می‌دهد اگر و فقط اگر  $G = HK$ .

**سؤال ۵.** فرض کنید  $p$  یک عدد اول فرد و  $G$  گروهی از مرتبه  $2p$  باشد. ثابت کنید  $G$  زیرگروهی از مرتبه  $p$  دارد.

**سؤال ۶.** فرض کنید  $G$  یک گروه باشد و  $\{N_i\}_{i \in I}$  را خانواده‌ای ناتهی از زیرگروه‌های سره و نرمال  $G$  در نظر بگیرید طوری که برای هر  $i \neq j$ ،  $N_i \cap N_j = \{1\}$ . اگر  $G = \bigcup_{i \in I} N_i$ ، ثابت کنید  $G$  آبلی است.

**سؤال ۷.** فرض کنید  $G$  گروهی متناهی و  $N$  زیرگروه نرمالی از  $G$  باشد. اگر مرتبه  $N$  و شاخص  $N$  در  $G$  نسبت به هم اول باشند، ثابت کنید  $N$  تنها زیرگروهی از  $G$  است که مرتبه‌اش  $|N|$  می‌باشد.

**سؤال ۸.** هر یک از احکام زیر را که درست است ثابت کنید و برای هر یک که نادرست است مثالی ناقض ارائه کنید.

(۱.۸) فرض کنید  $G$  یک گروه باشد. در این صورت زیرگروه‌های سره  $H$ ،  $K$  و  $L$  از  $G$  وجود ندارند طوری که  $G = H \cup K \cup L$ .

(۲.۸) فرض کنید  $G$  یک گروه متناهی باشد. اگر  $N_1$  و  $N_2$  دو زیرگروه نرمال  $G$  باشند و  $G/N_1 \cong N_2$  و  $G/N_2 \cong N_1$  آنگاه  $G/N_2 \cong N_1$ .

(۳.۸) فرض کنید  $G$  و  $H$  دو گروه غیرآبلی باشند. اگر  $G' \cong H'$ ، آنگاه  $G \cong H$ .

(۴.۸) فرض کنید  $G$  یک گروه باشد. اگر تمام زیرگروه‌های دوری  $G$  نرمال باشند، آنگاه هر زیرگروه  $G$  نرمال است.

توزیع نمره. سؤال‌های ۴ و ۸: هر کدام ۲۰ نمره،

بقیه سؤال‌ها: هر کدام ۱۰ نمره.

مجموع: ۱۰۰ نمره