



تاریخ: ۹۴/۱۱/۴  
شماره: .....  
پیوست: .....

دانشکده علوم ریاضی

مدت امتحان: ۴ ساعت

امتحان پایان ترم جبر ۱

۲۲-۲۱۷

نیمسال اول ۹۵-۹۴

سؤال ۱. صورت قضیه اول یکرختی برای گروه‌ها را بنویسید و آن را ثابت کنید. با استفاده از این قضیه نشان دهید اگر  $G_1$  و  $G_2$  دو گروه باشند،  $N_1 \leq G_1$  و  $N_2 \leq G_2$ ، آنگاه  $N_1 \times N_2 \leq G_1 \times G_2$  و

$$\frac{G_1 \times G_2}{N_1 \times N_2} \cong \frac{G_1}{N_1} \times \frac{G_2}{N_2}.$$

سؤال ۲. فرض کنید  $G$  یک گروه باشد. ثابت کنید  $G/Z(G) \cong \text{Inn}(G)$  و نتیجه بگیرید اگر  $G$  آبلی نباشد، آنگاه  $\text{Aut}(G)$  دوری نیست.

سؤال ۳. فرض کنید  $G$  یک گروه دوری از مرتبه  $n$  باشد. ثابت کنید  $\text{Aut}(G) \cong U(\mathbb{Z}_n)$ .

سؤال ۴. فرض کنید  $R$  یک حلقه جابه‌جایی و یک‌دار باشد و  $M$  را ایده‌آلی سره از آن در نظر بگیرید. ثابت کنید  $M$  ماکسیمال است اگر و فقط اگر  $R/M$  میدان باشد.

سؤال ۵. فرض کنید  $G$  یک گروه متناهی باشد با این ویژگی که  $\text{Aut}(G)$  عضوی از مرتبه ۲ مثل  $f$  دارد طوری که برای هر  $x \in G$  و فقط اگر  $f(x) = x$ ،  $x = 1$ . ثابت کنید  $G$  آبلی است. (راهنمایی: ابتدا نشان دهید هر عضو  $a \in G$  را می‌توان به ازای یک  $x \in G$  به شکل  $x^{-1}f(x)$  نوشت.)

سؤال ۶. فرض کنید  $G$  یک گروه و  $H$  زیرگروهی از آن با شاخص  $n$  باشد. اگر  $H$  شامل زیرگروهی نرمال و غیربدیهی از  $G$  نباشد، ثابت کنید  $G$  با زیرگروهی از  $S_n$  یکرخت است. (راهنمایی: از ایده‌آتبات قضیه کیلی استفاده کنید.)

سؤال ۷. فرض کنید  $R$  یک حلقه ناصفر باشد با این ویژگی که برای هر عضو ناصفر  $a \in R$ ، عضو منحصر به فرد  $b \in R$  موجود است طوری که  $aba = a$ . ثابت کنید  $R$  حلقه تقسیم است. (راهنمایی: ابتدا نشان دهید  $R$  مقسوم علیه صفر ندارد، بعد نشان دهید که برای  $a$  و  $b$  داده شده در صورت سؤال،  $bab = b$  و سپس به  $ab = 1$  توجه کنید.)

سؤال ۸. هر یک از احکام زیر را که درست است ثابت کنید و برای هر یک که نادرست است مثالی ناقض ارائه کنید.

(۱.۸) هر خودریختی از  $S_2$  یک خودریختی داخلی است.

(۲.۸) یکرختی  $(\mathbb{Q}^+, \times) \cong (\mathbb{Z}[x], +)$  برقرار است.

(۳.۸) برای هر حلقه غیریک‌دار  $R$  و برای هر  $a \in R$ ،  $Ra$  ایده‌آل چپی از  $R$  است.

(۴.۸) برای هر حلقه  $R$ ،  $Z(R) \leq R$ .

توزیع نمره. سؤال‌های ۳ و ۸: هر کدام ۲۰ نمره،

بقیه سؤال‌ها: هر کدام ۱۰ نمره.

مجموع: ۱۰۰ نمره