



تاریخ: ۹۵/۲/۹  
شماره: .....  
پیوست: .....

دانشکده علوم ریاضی

مدت امتحان: ۵ ساعت

امتحان میان‌ترم اول روش‌های همولوژیکی در جبر جابه‌جایی

۲۲ - ۲۵۲+

نیمسال دوم ۹۵-۹۴

توجه: در این امتحان منظور از حلقه، حلقه یک‌دار است که در آن  $1 \neq 0$ . برای هر زیرحلقه  $R'$  از حلقه  $R$ ،  
 $1_{R'} = 1_R$  و برای هر هم‌ریختی حلقه‌ای  $R' : R \rightarrow R'$ ،  $\varphi(1_R) = 1_{R'}$ .

سؤال ۱. فرض کنید  $R$  حلقه‌ای جابه‌جایی و  $S$  زیرمجموعه‌ای بسته ضربی از  $R$  باشد. درستی هر یک از احکام زیر را ثابت کنید:

(۱.۱)  $S^{-1}(-)$  تابعگونی همورد و دقیق از رسته  $R$ -مدول‌ها به رسته  $S^{-1}R$ -مدول‌ها است.

(۲.۱)  $S^{-1}(-) \cong S^{-1}R \otimes_R -$ .

(۳.۱)  $S^{-1}R, R$ -مدولی یک‌دست است.

سؤال ۲. صورت قضیه‌های اول و دوم یگانگی تجزیه اولیه مینیمال را بنویسید و هر دو را ثابت کنید.

سؤال ۳. صورت موضعی تعمیم قضیه ایده‌آل اصلی کرول را بنویسید و آن را ثابت کنید.

سؤال ۴. فرض کنید  $a_1, \dots, a_t$  اعضای از ایده‌آل ماکسیمال یک حلقه جابه‌جایی موضعی مثل  $R$  باشند. صورت قضیه‌ای که کران پایینی برای بعد حلقه  $R/\langle a_1, \dots, a_t \rangle$  ارائه می‌دهد را بنویسید و آن را ثابت کنید. شرط تساوی چیست؟ چرا؟

سؤال ۵. ثابت کنید هر حلقه موضعی منظم، حوزه صحیح و کوهن-مکالی است.

سؤال ۶. فرض کنید  $R$  حلقه‌ای جابه‌جایی و نوتری باشد و  $\mathfrak{p}$  را ایده‌آلی اول از  $R$  در نظر بگیرید با این ویژگی که توسط  $\text{ht}_R(\mathfrak{p})$  عضو تولید می‌شود. ثابت کنید  $R_{\mathfrak{p}}$  حلقه موضعی منظم است.

سؤال ۷. فرض کنید  $(R, \mathfrak{m})$  یک حلقه جابه‌جایی موضعی و نوتری باشد و  $M, R$ -مدولی متناهی مولد. ثابت کنید اگر  $x \in \mathfrak{m}$  عضوی  $M$ -منظم باشد، آنگاه  $1 + \text{depth}_R(M) = \text{depth}_R(M/xM)$ .

سؤال ۸. فرض کنید  $K$  یک میدان باشد و  $K[[x, y]]$  حلقه سری‌های توانی روی  $x$  و  $y$ . ثابت کنید  $\dim K[[x, y]]$  برابر با ۲ است. آیا  $K[[x, y]]/\langle xy \rangle$  کوهن-مکالی است؟ موضعی منظم چطور؟

سؤال ۲: ۱۰+۱۵ نمره،

سؤال ۴: ۱۰+۱۰ نمره،

سؤال ۶: ۲۵ نمره،

سؤال ۸: ۱۰+۱۰+۱۰ نمره.

سؤال ۱: ۱۰+۱۰+۵ نمره،

سؤال ۳: ۲۰ نمره،

سؤال ۵: ۱۰+۲۰ نمره،

سؤال ۷: ۲۵ نمره،

مجموع: ۲۰۰ نمره