



تاریخ: ۹۵/۳/۶

شماره: .....

پیوست: .....

دانشکده علوم ریاضی

مدت امتحان: ۵ ساعت

امتحان میان‌ترم دوم روش‌های همولوژیکی در جبر جابه‌جایی

۲۲ - ۲۵۲+

نیمسال دوم ۹۵-۹۴

توجه: در این امتحان منظور از حلقه، حلقه یک‌دار است که در آن  $1 \neq 0$ . برای هر زیرحلقه  $R'$  از حلقه  $R$ ،  $1_{R'} = 1_R$  و برای هر هم‌ریختی حلقه‌ای  $\varphi: R \rightarrow R'$ ،  $\varphi(1_R) = 1_{R'}$ .

سؤال ۱. صورت لم نعل اسب در حالت انژکتیو را بنویسید و آن را ثابت کنید.

سؤال ۲. فرض کنید  $R$  و  $R'$  دو حلقه و  $U$  یک تابعگن پادورد جمعی از رسته  $R\mathbb{M}$  به رسته  $R'\mathbb{M}$  باشد. هم‌چنین، فرض کنید  $M$  یک  $R$ -مدول و  $\mathbf{P}_\bullet$  تحلیل پروژکتیوی برای  $M$  باشد. ثابت کنید برای هر  $n \geq 0$  و هر  $m \geq 1$

$$R^{m+1}U(K_{n-1}(\mathbf{P}_\bullet)) \cong_{R'} R^m U(K_n(\mathbf{P}_\bullet))$$

و نتیجه بگیرید که برای هر  $t \geq 0$

$$R^{t+1}U(M) \cong_{R'} R^t U(K_{t-1}(\mathbf{P}_\bullet)).$$

سؤال ۳. صورت قضیه‌ای که بیان می‌کند برای محاسبه  $\text{Tor}_n^R(M, N)$  می‌توانیم از یک تحلیل یک‌دست برای  $M$  استفاده کنیم را بنویسید و آن را ثابت کنید.

سؤال ۴. فرض کنید  $R$  یک حلقه باشد،  $M$  یک  $R$ -مدول ناصفر و  $n \in \mathbb{N}_0$ . ثابت کنید اگر به ازای تحلیل پروژکتیوی از  $M$  مثل  $\mathbf{P}_\bullet$ ،  $\text{Ext}_R^{n+1}(M, K_n(\mathbf{P}_\bullet)) = 0$ ، آنگاه  $K_{n-1}(\mathbf{P}_\bullet)$  پروژکتیو است.

سؤال ۵. فرض کنید  $(R, \mathfrak{m}, k)$  یک حلقه جابه‌جایی موضعی و نوتری است. درستی هر یک از احکام زیر را ثابت کنید:

(۱.۵) اگر  $F$  یک تابعگن همورد نیم‌دقیق و  $R$ -خطی از رسته  $R\mathbb{M}$  به رسته  $R'\mathbb{M}$  باشد با این ویژگی که  $R$ -مدول‌های متناهی مولد را به  $R$ -مدول‌های متناهی مولد می‌نگارد و  $M, R$ -مدولی متناهی مولد باشد که  $F(M) \neq 0$ ، آنگاه  $F(k) \neq 0$ .

(۲.۵) اگر  $M, R$ -مدولی ناصفر و متناهی مولد باشد، آنگاه

$$\text{pd}_R(M) = \sup \{n \in \mathbb{N}_0 \mid \text{Ext}_R^n(M, k) \neq 0\}.$$

سؤال ۶. فرض کنید  $R$  یک حلقه است و

$$P_\bullet = \cdots \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow 0$$

$R$ -همبافتی دقیق. ثابت کنید اگر  $P_i$ ها پروژکتیو باشند، آنگاه  $P_\bullet \sim P_\bullet$ .

سؤال ۷. فرض کنید  $R$  یک حلقه جابه‌جایی و نوتری است. ثابت کنید برای هر  $R$ -مدول مثل  $N$ ،

$$\text{id}_R(N) = \sup \{ \text{id}_{R_p}(N_p) \mid p \in \text{Spec}(R) \}.$$

سؤال ۸. فرض کنید  $R$  یک حلقه باشد و  $n \in \mathbb{N}_0$ . ثابت کنید شرایط زیر معادل‌اند:

$$(۱.۸) \quad \text{pd}_R(M) \leq n, M \text{ مدول مثل } M$$

$$(۲.۸) \quad \text{Ext}_R^{n+1}(R/\mathfrak{a}, N) = 0, \mathfrak{a} \text{ مثل } R \text{ چپ}$$

$$(۳.۸) \quad \text{id}_R(N) \leq n, N \text{ مدول مثل } N$$

سؤال ۲: ۱۰+۵ نمره،

سؤال ۴: ۱۵ نمره،

سؤال ۶: ۱۰ نمره،

سؤال ۸: ۱۵ نمره.

توزیع نمره. سؤال ۱: ۲۰ نمره،

سؤال ۳: ۲۵ نمره،

سؤال ۵: ۱۰+۱۵ نمره،

سؤال ۷: ۲۵ نمره،

مجموع: ۱۵۰ نمره