به‌نام خدا

تاریخ: ۹۵/۳/۲۳
شماره: ....
پیوست: ....

دانشکدهٔ علوم ریاضی

مدّت امتحان: ۳ ساعت

امتحان پایان‌ترم روش‌های همولوژیکی در جبر جابه‌جایی

۲۲ − ۲۵۲+

نیمسال دوم ۹۵—۹۴

توجه: در این امتحان منظور از حلقه، حلقهٔ یکدار است که در آن $۱ \neq ۰$. برای هر زیرحلقهٔ R' از حلقهٔ R، $۱_{R'} = ۱_R$ و برای هر هم‌ریختی حلقه‌ای $\varphi : R \longrightarrow R'$، $\varphi(۱_R) = ۱_{R'}$.

سؤال ۱. فرض کنید $(R, \mathfrak{m}, k)$ یک حلقهٔ جابه‌جاییِ موضعی و نوتری باشد و $M_۱$، ...، M_n، R—مدول‌هایی متناهی مولد و ناصفر. ثابت کنید اگر برای هر $n \geq i \geq ۱$، $\operatorname{depth}_R(M_i) \geq d$، آنگاه رشته‌ای مثل

$$x_۱, \ldots, x_d$$

از اعضای $\mathfrak{m}$ وجود دارد با این ویژگی که برای هر $۱ \leq i \leq n$، M_i—منظم است.

سؤال ۲. فرض کنید K یک میدان باشد و $K[|x, y, z|]$ حلقهٔ سری‌های توانی روی x، y و z. حلقهٔ R و R—مدول M را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$R = \frac{K[|x, y, z|]}{\langle xz, yz \rangle}, \qquad M = \frac{R}{\langle z + \langle xz, yz \rangle \rangle}.$$

$\operatorname{pd}_R(M)$ را محاسبه کنید.

سؤال ۳. صورت فرمولِ باس را بنویسید و آن را ثابت کنید.

سؤال ۴. فرض کنید $(R, \mathfrak{m}, k)$ یک حلقهٔ جابه‌جاییِ موضعی و نوتری باشد. ثابت کنید اگر $\operatorname{pd}_R(k) < +\infty$، آنگاه R حلقه‌ای موضعیِ منظم است.

سؤال ۵. ثابت کنید موضعی‌سازی هر حلقهٔ موضعیِ منظم در هر ایده‌آل اوّل از آن، حلقه‌ای موضعیِ منظم است.

توزیع نمره. هر سؤال ۲۰ نمره دارد.

مجموع: ۱۰۰ نمره